2ª Lista de Exercícios - Cálculo I - Gisely

1- Decida se as funções abaixo são contínuas ou descontínuas nos pontos indicados. Em caso de descontinuidade, verifique se é possível redefinir a função de modo a torná-la contínua. Justifique suas respostas.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x-4}, & x \neq 4 \\ 1, & x = 4 \end{cases}$; $a = 4$

b) $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, $a = 0$

c) $g(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x+3}$, $a = -3$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{|x-3|}, & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}$ $a = 3$

e) $g(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y+5} - \sqrt{y}}{1}, & y \neq 0 \\ 1, & y = 0 \end{cases}$ $a = 0$

f) $\begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$, $a = 2$.

g) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 1 \\ 8-3x, & 1 < x < 2 \\ x+3, & x \geq 2 \end{cases}$

$a = 1$, $b = 2$.

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 2}{x-8}$, $a = 8$

i) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$, $a = 0$

j) $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1-x} - 1}{x}$, $a = 0$

2) Esboce o gráfico das funções (a), (b), (d), (f) e (g) do Exercício 1.

3 - Determine o valor de $\underline{a}$, para que f seja contínua em $x = 2$ e os valores de $\underline{b}$ e $\underline{c}$ para que g seja contínua em $x = 4$, onde:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases} \quad e \quad g(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ bx + c, & 1 < x < 4 \\ -2x, & x \geq 4. \end{cases}$$

4 - Determine os valores de x, para os quais a função dada seja contínua. Justifique sua resposta usando os resultados visto em sala

a) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}}$

b) $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x^2}$

c) $f(x) = \begin{cases} \ln x - \dfrac{1}{x^2}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = x^2(x+3)^2$ $\mathbb{R}$

d) $h(x) = \sqrt{x^2+4}$ $\mathbb{R}$

e) $g(x) = \operatorname{sen}(x^3 + 9x)$ $\mathbb{R}$

f) $h(x) = |x-5|$ $\mathbb{R}$

g) $f(x) = 5 \operatorname{sen} x$

h) $g(x) = e^{x^2}$ $\mathbb{R}$,

i) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ $\mathbb{R}_+$

j) $h(x) = \ln(x^2+1)$ $\mathbb{R}$

l) $g(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$, $x \in (0, \pi/2]$

$\operatorname{sen} x > 0$

m) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

n) $h(x) = \dfrac{x^2}{x-4} - \dfrac{1}{x}$

o) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$

p) $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

q) $h(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < -2 \\ x - 5, & -2 \leq x \leq 1 \\ 3 - x, & x > 1. \end{cases}$

r) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{9-x^2}{4-x}}, & x \neq 4 \\ 0, & x = 4 \end{cases}$

s) $f(x) = \ln(\cos x^2)$

5) Sejam $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$

Mostre que f e g são descontínuas em $a=0$, mas o produto $f \cdot g$ é contínuo em $a=0$. Este exemplo contradiz o Teorema visto em sala? Justifique sua resposta.

6) Dê um exemplo para mostrar que o produto de duas funções f e g pode ser contínuo em $a=1$, onde f é contínua em $a=1$ e g é descontínua em $a=1$.

7) Prove que se f é contínua em $\underline{a}$ e g descontínua em $\underline{a}$, então $f+g$ é descontínua em $\underline{a}$.

8) Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x^3+1)$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \ln\left(\frac{3x}{x^2-4}\right)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\cos x}$.

d) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \operatorname{sen}(\ln(2x+1))$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$. h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{2x^2}$.

i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2}{1-\cos^2 \frac{x}{2}}$ j) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+3x}{\operatorname{sen} x}$ l) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\ln x}$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x$. n) $\lim\limits_{t \to 0^+} (\cos t)^t$ o) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{x^x}$.

p) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x(1+\ln x)$ q) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$ (sugestão: $x = \dfrac{1}{y}$)

r) $\lim\limits_{x \to 0} x \cos \dfrac{1}{x}$ s) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

t) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ u) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ (sug: $x = 2y$)

v) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ (sugestão: escreva $2x+3 = (2x+1)+2$

e simplifique. Depois faça $y = x + 1/2$)

x) $\lim\limits_{x \to \pi/2} (1+\cos x)^{3 \sec x}$ (sugestão: $y = \cos x$).