1^a LISTA DE EDO

Professora Gisely Pereira

1. Encontre a solução geral da equação diferencial e ilustre-a graficamente:

   a-) $y' = 3$ b-)$y' = 3x^2$ c-)$y' = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

2. Prove que y é uma solução da equação diferencial dada:

   (a) $y'' - 3y' + 2y = 0$;$y = c_1e^x + c_2e^{2x}$;$c_1, c_2 \in R$
   (b) $y' + 3y = 0$;$y = ce^{-3x}$;$c \in R$
   (c) $(x-2y)\dfrac{dy}{dx} + 2x + y = 0$;$y^2 - x^2 - xy = c$;$c \in R$

3. Resolva as seguintes equações diferenciais de variáveis separáveis:

   a-) $\sec x dy - 2y dx = 0$
   b-) $xdy - ydx = 0$
   c-) $3ydx + (xy + 5x)dy = 0$
   d-) $y' = x - 1 + xy - y$
   e-) $e^{(2y+x)}dx - e^{(2x-y)}dy = 0$
   f-) $y(1+x^3)y' + x^2(1+y^2) = 0$
   g-) $xy - y' \sec x = 0$
   h-) $e^y \mathrm{sen} x dx - \cos^2 x dy = 0$

4. Resolva os p.v.i's

   (a) $xdy = \sqrt{x^2 - 16}\,dx$ e $y(4) = 0$
   (b) $xe^{-t}\dfrac{dx}{dt} = t$ e $x(0) = 1$

5. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem:

   (a) $y' + 2y = e^{2x}$
   (b) $xy' - 3y = x^5$
   (c) $xy' + y + x = e^x$
   (d) $x^2dy + (2xy - e^x)dx = 0$
   (e) $(y\,\mathrm{sen} x - 2)dx + \cos x dy = 0$
   (f) $\mathrm{tg}\, x dy + (y - \mathrm{sen} x)dx = 0$
   (g) $y' + 3x^2y = x^2 + e^{-x^3}$
   (h) $y' + y \,\mathrm{cotg}\, x = 4x^2 \mathrm{cosec}\, x$

(i) $xy' + (2+3x)y = xe^{-3x}$

(j) $x^{-1}y' + 2y = 3$

6. Resolva os p.v.i's

   (a) $xy' - y = x^2 + x \quad \text{e} \quad y(1) = 2$

   (b) $xy' + y + xy = e^{-x} \quad \text{e} \quad y(1) = 0$

7. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

   (a) $2t\dfrac{dy}{dt} + 2y = ty^3$

   (b) $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{y}{t} = y^3$

   (c) $yy' + y^2 tg\, t = cos^2 t$

   (d) $y^2dx - (2xy+3)dy = 0$

   (e) $ydx + \left(x - \dfrac{1}{2}x^3y\right)dy = 0$

8. Resolva as seguintes equações diferenciais homogêneas de primeira ordem:

   (a) $y' = \dfrac{x+y}{x}$

   (b) $2y - xy' = 0$

   (c) $y' = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$

   (d) $y' = \dfrac{y^2+2xy}{x^2}$

   (e) $y' = \dfrac{4y-3x}{2x-y}$

9. Mostre que y_1 é solução de cada uma das equações de Ricatti abaixo e encontre a solução geral para cada uma das equações:

   (a) $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \;\;,\;\; y_1 = x$

   (b) $x^2y' = -1 - xy + x^2y^2 \;\;,\;\; y_1 = x^{-1}$

   (c) $2y'\cos x = 2\cos^2 x - \text{sen}^2 x + y^2 \;\;,\;\; y_1 = \text{sen} x$

10. Determine a função cujo gráfico passe pela origem e tenha reta tangente de coeficiente angular $x - y$.

11. Segundo uma das leis de Kirchhoff para circuitos elétricos, num determinado circuito simples com um resistor R e indutor L ligados em série com uma força eletromotriz V constante, se $t > 0$ a corrente I satisfaz a equação diferencial:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V$$

(a) Resolva a equação diferencial.

(b) Encontre $\lim_{t \to \infty} I(t)$

12. Nos problemas a seguir, uma equação diferencial é dada junto com o campo ou área de atuação em que ela aparece. Classifique cada uma como uma EDO ou EDP, dê a ordem e indique as variáveis independentes e dependentes. Se for uma EDO, indique se ela é linear ou não linear.

    (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$
    (equação de Hermite,oscilador harmônico quântico-mecânico)

    (b) $5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 9x = 2\cos 3t$
    (vibrações mecânicas, circuitos elétricos, sismologia)

    (c) $\dfrac{\partial^2 u}{dx^2} + \dfrac{\partial^2 u}{dy^2} = 0$
    (equação de Laplace, teoria do potencial, eletricidade, calor, aerodinâmica)

    (d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(2-3x)}{x(1-3y)}$
    (competição entre duas espécies, ecologia)

    (e) $\dfrac{dx}{dt} = k(4-x)(1-x)$ onde k é uma constante.
    (taxas de reação química)

    (f) $\dfrac{dp}{dt} = kp(P-p)$, onde k e P são constantes.
    (curva logística, epidemologia, economia)

    (g) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + xy = 0$
    (aerodinâmica, análise de estresse)

13. Corrida de carros. Dois motoristas,Alison e Kevin, estão participando de uma corrida de carros. Começando parados, cada um deles prossegue com uma aceleração constante. Alison percorre o último $\frac{1}{4}$ da distância em 3 segundos, ao passo que Kevin percorre o último $\frac{1}{3}$ da distância em 4 segundos. Quem vence e com qual diferença de tempo?

14. A taxa de variação de uma certa população é proporcional à raiz quadrada de sua dimensão. Modele esta situação com uma equação diferencial.

15. A taxa de variação da velocidade de um objeto é proporcional ao quadrado da velocidade. Modele esta situação com uma equação diferencial.

16. Em uma população de tamanho S, a taxa de variação do número N de pessoas que ouviram um boato é proporcional ao número de pessoas que ainda não ouviram. Modele esta situação com uma equação diferencial.

17. A taxa de mudança da população p de bactérias no instante t é proporcional a população no instante t. Modele essa situação com uma equação diferencial.

18. A velocidade no instante t de uma partícula que se move ao longo de uma linha reta é proporcional a quarta potência de sua posição x. Modele essa situação com uma equação diferencial.

19. A taxa de mudança na temperatura T do café no instante t é proporcional a diferença entre a temperatura M do ar no instante t e a temperatura do café no instante t. Modele essa situação com uma equação diferencial.

20. A taxa de mudança da massa A do sal no instante t é proporcional ao quadrado da massa do sal presente no instante t. Modele essa situação com uma equação diferencial.