3ª Lista de E.D.O

1.) Resolva as seguintes equações diferenciais

a.) $y'' - y' - 30y = 0$

b.) $y'' + y = 0$

c.) $y'' + 6y' + 9y = 0$

d.) $y'' + 2y' + 3y = 0$

e.) $y'' - 3y' - 5y = 0$

f.) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

g.) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

h.) $y^{(iv)} + 2y'' + y = 0$

i.) $y^{(iv)} - y = 0$

j.) $y^{(iv)} + 5y''' = 0$

Respostas:

a.) $y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{6x}$

b.) $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

c.) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$

d.) $y = c_1 e^{-x} \cos(\sqrt{2}x) + c_2 e^{-x} \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$

e.) $y = e^{\frac{3}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{29}}{2}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{29}}{2}x\right)\right)$

f.) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$

g.) $y = e^{x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$

$y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\operatorname{sen} x$

i.) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x$

j.) $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-5x}$

2.) Determine a forma apropriada da solução particular y_p para se utilizar o método dos coeficientes a determinar. Não calcule as constantes.

a.) $y''' - 2y'' + y' = x^3 + 2e^{x}$

b.) $y^{(iv)} + 4y'' = \operatorname{sen}(2x) + xe^{x} + 4$

a) $y_p = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + Ex^2 e^{x}$

b) $y_p = Ax^2 + (Bx + C)e^{x} + x(D\cos(2x) + E\operatorname{sen}(2x))$

c) $y^{(iv)} + 2y''' + 2y'' = 3e^{x} + e^{-x} \operatorname{sen} x$ c) $y_p = Ae^{x} + x e^{-x}(B\cos x + C \operatorname{sen} x)$

3.) Determine a solução geral das equações diferenciais utilizando o método de variação de parâmetros.

a.) $y'' + y = \operatorname{tg} x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

b.) $y'' + 4y' + 4y = x^{-2} e^{-2x}$, $x > 0$

c.) $y'' + 4y = 3 \operatorname{cossec}(2x)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

d.) $y''' + y' = \operatorname{tg} x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Respostas:

a.) $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \cos x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$

b.) $y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x - \ln x)$

c.) $y = \cos(2x)\left(c_1 - \frac{3x}{2}\right) + \operatorname{sen}(2x)\left(c_2 + \left(\frac{3 \ln(\operatorname{sen}(2x))}{4}\right)\right)$

d.) $y = c_1 + c_2 \cos x + \operatorname{sen} x\,(c_3 - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)) - \ln(\cos x)$

4.) Resolva os seguintes problemas de valor inicial

a.) $9y'' + 6y' + 82y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$

b.) $6y''' + 5y'' + y' = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$

Respostas.

a.) $y = e^{-\frac{x}{3}}\left(-\cos(3x) + \frac{5\,\text{sen}(3x)}{9}\right)$

b.) $y = 8 - 18e^{\frac{x}{3}} + 8e^{-\frac{x}{2}}$

5.) Determine os intervalos nos quais se tem certeza da existência de soluções.

a.) $y^{(iv)} + 4y''' + 3y = x$

b.) $xy''' + (\text{sen}\,x)y'' + 3y = \cos x$

c.) $x(x-1)\,y^{(iv)} + e^{x}y'' + 4x^2 y = 0$

d.) $y''' + xy'' + x^2y' + x^3y = \ln x$

Respostas:

a.) $-\infty < x < +\infty$

b.) $x < 0$ ou $x > 0$

c.) $x < 0$ ou $0 < x < 1$ ou $x > 1$

d.) $x > 0$

6.) Use o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução de cada equação diferencial proposta.

a.) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $x > 0$; $y_1(x) = x^{-1}$

b.) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$, $x > 0$; $y_1(x) = x$

c.) $xy'' - y' + 4x^3y = 0$, $x > 0$; $y_1(x) = \text{sen}(x^2)$

d.) $(x-1)y'' - xy' + y = 0$, $x > 1$; $y_1(x) = e^{x}$

Respostas

a.) $y_2(x) = x^{-1} \ln x$

b.) $y_2(x) = x e^{x}$

c.) $y_2(x) = \cos(x^2)$

d.) $y_2(x) = x$

7-) Encontre a solução geral das seguintes E.D.O's lineares homogêneas do tipo Euler-Cauchy.

a.) $x^2 y'' + 4xy' - 10y = 0 \quad , \quad x \neq 0$

b.) $x^3 y''' + 6x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0 \quad , \quad x \neq 0$

c.) $2x^2 y'' + 5xy' - 2y = 0 \quad , \quad x > 0$

d.) $x^2 y'' - 7xy' + 16y = 0 \quad , \quad x \neq 0$

e.) $x^2 y'' + xy' + 4y = 0 \quad , \quad x \neq 0$

f.) $x^4 y^{(iv)} + 6x^3 y''' + 8x^2 y'' + 2xy' = 0 \quad , \quad x \neq 0$

Respostas

a.) $y = c_1 x^2 + \dfrac{c_2}{x^5}$

b.) $y = c_1 x + \dfrac{c_2}{x} + \dfrac{c_3}{x^3}$

c.) $y = \dfrac{c_1}{x^2} + c_2 \sqrt{x}$

d.) $y = \dfrac{c_1}{x^2} + c_2 \sqrt{|x|}$

e.) $y = c_1 \cos(2 \ln|x|) + c_2 \,\text{sen}(2 \ln|x|)$

f.) $y = c_1 + c_2 \ln|x| + c_3 \cos(\ln|x|) + c_4 \,\text{sen}(\ln|x|)$