4^a LISTA DE EDPS

Professora Gisely Pereira

OBSERVAÇÃO:

Se as condições iniciais forem Dirichlet não-homogêneas, a solução da equação do calor sofrerá a alteração abaixo:

$$u(x,t) = \frac{(T_2 - T_1)x}{L} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big),$$

com

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \Big(f(x) - \frac{(T_2 - T_1)x}{L} - T_1\Big)\operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\, dx,$$

onde

$u_t - ku_{xx} = 0$
$u(0,t) = T_1$
$u(L,t) = T_2$
$u(x,0) = f(x).$

1. Encontre a solução do problema abaixo com condições de Neuman homogêneo (significam condições de fluxo nulo, ou seja extremidades isoladas termicamente):

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0\,, u \in (0,L) \times I \\ u(x,0) = f(x)\,, x \in (0,L) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \end{cases}$$

2. Considere o problema de condução de calor numa barra metálica de comprimento unitário, descrito pela equação:

$$100u_{xx} = u_t, \;\; 0 < x < 1,\; t > 0.$$

Considere também as seguintes condições de contorno:

$$\text{(I)} \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} u(0,t) = 50 \\ u(1,t) = 80 \end{cases}$$

$$\text{(III)} \begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases}.$$

Considere, por fim, as distribuições iniciais de temperatura na barra dadas por:

$$\text{(A)} \quad \left\{ \; u(x,0) = 10 \right.$$

$$\text{(B)} \quad \left\{ \; u(x,0) = x \right.$$

Determine a solução $u(x,t)$ do problema com:

a) CC: **I** e CI: **A**
b) CC: **I** e CI: **B**
c) CC: **II** e CI: **A**
d) CC: **II** e CI: **B**
e) CC: **III** e CI: **A**
f) CC: **III** e CI: **B**

3. Considere uma barra de comprimento igual a 2. A seguinte equação diferencial parcial representa a propagação de calor nessa barra:

$$2u_{xx} = u_t.$$

Supõe-se que a barra esteja inicialmente com temperatura igual a 0 em toda sua extensão, e que no instante $t = 0$ as extremidades da barra sejam subitamente levadas à temperatura de 10, sendo mantidas nessa temperatura desse momento em diante. Calcule a função que descreve a distribuição de temperaturas nas barra em função de x quando t=5.

4. Considere uma barra de comprimento igual a 2. A seguinte equação diferencial parcial representa a propagação de calor nessa barra:

$$4u_{xx} = u_t.$$

a) Essa barra encontra-se com as extremidades (pontos $x = 0$ e $x = 2$) termicamente isoladas, e possui, inicialmente, a temperatura em seus pontos dada por

$$u(x,0) = 5x^2.$$

A barra é deixada assim por várias horas até entrar em equilíbrio térmico. Determine a equação que descreve a distribuição de temperaturas na barra quando o equilíbrio é atingido;

b) Após entrar em equilíbrio térmico, a barra subitamente tem os isolamentos térmicos das extremidades retirados, sendo as temperaturas nas extremidades fixadas em $u(0,t) = 20$ e $u(2,t) = -20$ a partir desse instante (adote a convenção de que $t = 0$ no exato instante em que o isolamento térmico é retirado, e as temperaturas das extremidades são fixadas nesses valores). Determine a função que descreve a distribuição de temperaturas na barra, em função de x e t, após a barra ter as temperaturas de suas extremidades fixadas.

5. Considere uma barra de comprimento igual a 2. A seguinte equação diferencial parcial representa a propagação de calor nessa barra:

$$4u_{xx} = u_t.$$

Essa barra possui, inicialmente, a temperatura em todos os seus pontos igual a 10, sendo que as extremidades da barra possuem temperaturas fixadas em 20, para $x = 0$, e em -20, para $x = 2$. A barra é mantida assim por varias horas, até entrar em equilíbrio térmico. Quando a barra atinge equilíbrio térmico nessas condições, suas extremidades são isoladas termicamente, sendo mantidas isoladas a partir desse instante. (Adote a convenção de que $t = 0$ no exato instante em que a barra recebe isolamento térmico em suas extremidades).

   a) Determine a distribuição de temperaturas na barra em função de x, no instante imediatamente anterior à colocação do isolante térmico nas extremidades da barra.

   b) Calcule a função que descreve a distribuição de temperaturas na barra, em função de x e t, após a barra ter suas extremidades termicamente isoladas.